Contrôle d'optimisation combinatoire avancée
MPRO

9 février 2026

Tout objet électronique (smartphone, tablette, ordinateur, calculatrice, etc.) interdit.

Tout document papier autorisé.

1 Matroïdes Θ_n

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Considérons $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ deux ensembles disjoints de cardinal n. Posons

$$\mathcal{I} \coloneqq \left\{S \subseteq X \cup Y : |S| \leqslant n, |S \cap X| \leqslant 2 \text{ et } S \neq Y - y_i + x_i \, \forall i\right\}.$$

Question 1. *Montrer que $(X \cup Y, \mathcal{I})$ est un matroïde.*

Notons d'abord que le cardinal maximal d'une partie dans $\mathcal{I}$ est égal à n (par exemple $Y \in \mathcal{I}$). Si on prend $S \in \mathcal{I}$, toute partie stricte T de S satisfait $|T| \leqslant n$, $|T \cap X| \leqslant 2$ et, étant de cardinal $\leqslant n - 1$, est différente de $Y - y_i + x_i$.

Soient $S, T \in \mathcal{I}$ telles que $|S| < |T|$. Supposons d'abord que S n'est pas un sous-ensemble de cardinal $n - 1$ d'une partie de la forme $Y - y_i + x_i$. On a $|T \cap X| > |S \cap X|$ ou $|T \cap Y| > |S \cap Y|$. Dans le premier cas, on ajoute un élément e de $T \cap X$ à S. Dans le second cas, on ajoute un élément e de $T \cap Y$ à S. Dans tous les cas, $S + e \in \mathcal{I}$. Supposons ensuite que S est de la forme $Y - y_i$. Comme $T \neq S + x_i$, la partie T contient un élément qui n'est pas dans $S + x_i$, que l'on peut ajouter à S tout en maintenant ce dernier dans $\mathcal{I}$. Enfin, supposons S de la forme $Y \setminus \{y_i, y_j\} + x_i$. Comme $T \neq S + y_j$, la partie T contient un élément qui n'est pas dans $S + y_j$, que l'on peut ajouter à S tout en maintenant ce dernier dans $\mathcal{I}$.

Ce matroïde est appelé *matroïde* Θ_n.

2 Théorème de Rado

2.1 Énoncé et preuve

Considérons un matroïde $M = (V, \mathcal{I})$ de fonction rang r et une famille $\mathcal{F} = \{X_1, \dots, X_n\}$ de parties de V. Un *transversal* de $\mathcal{F}$ est une partie T de V telle qu'il existe une bijection $\sigma \colon [n] \to T$ avec $\sigma(i) \in X_i$ pour tout $i \in [n]$.

L'objectif de cet exercice est démontrer un théorème de Rado (1942).

Théorème (Théorème de Rado)**.** *La famille $\mathcal{F}$ admet un transversal qui est indépendant dans M si et seulement si*

$$r\Big(\bigcup_{i \in I} X_i\Big) \geqslant |I| \qquad \forall I \subseteq [n] \,. \tag{1}$$

Pour simplifier la discussion, un transversal de $\mathcal{F}$ qui est indépendant dans M sera appelé *transversal indépendant.*

Question 2. *Montrer que si $\mathcal{F}$ admet un transversal indépendant, alors l'inégalité* (16) *est satisfaite pour tout $I \subseteq [n]$.*

`Soit` T `un transversal indépendant. Prenons` $I \subseteq [n]$. `Posons` $T' = \sigma(I)$. `Noter que par hypothèses,` $T' \subseteq T$ `(donc` T' `indépendant),` $|T'| = |I|$ `et` $T' \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$. `On a alors` $r\big(\bigcup_{i \in I} X_i\big) \geqslant r(T') = |T'| = |I|$.

Nous allons maintenant nous intéresser à la réciproque.

Question 3. *Décrire un matroïde transversal sur V dont les bases, lorsqu'elles sont de cardinal n, sont exactement les transversaux des X_i.*

`On considère le graphe biparti` G `avec comme classes` V `et` $[n]$`, et une arête entre` $v \in V$ `et` $i \in [n]$ `si` $v \in X_i$. `Une partie de` V `est un indépendant de` N `précisément lorsqu'il existe un couplage de` G `qui la couvre. Une base de cardinal` n `est un transversal des` X_i.

Question 4. *Démontrer que la fonction rang r_N du matroïde transversal N introduit à la question 3 vérifie*

$$r_N(S) = \min_{I \subseteq [n]} \Big(\big| S \cap \big(\bigcup_{i \in I} X_i \big) \big| + n - |I| \Big) \qquad \forall S \subseteq V \,.$$

`Il s'agit de trouver le cardinal maximum d'un couplage de` $G[S \cup [n]]$. `Toute couverture minimale pour l'inclusion de ce graphe est formée d'une partie` J `de` $[n]$ `et des extrémités dans` S `des arêtes incidentes à` $[n] \setminus J$. `En posant` $I \coloneqq [n] \setminus J$, `cette couverture est de cardinal` $\big|S \cap \big(\bigcup_{i \in I} X_i\big)\big| + n - |I|$. `On conclut à l'aide de Kőnig.`

Question 5. *Montrer que s'il n'existe pas de transversal indépendant, alors il existe $S^\star \subseteq V$ et $I^\star \subseteq [n]$ tels que*

$$r(S^\star) + \big| \big(\bigcup_{i \in I^\star} X_i \big) \setminus S^\star \big| < |I^\star| \,.$$

Supposons qu'il n'existe pas de transversal indépendant. D'après la question 3, tout indépendant commun à M et N a un cardinal $\leqslant n-1$. D'après le théorème d'intersection de matroïdes, il existe $S^\star \subseteq V$ tel que $r(S^\star)+r_N(V\setminus S^\star) \leqslant n-1$. D'après la question 4 appliquée à $S = V \setminus S^\star$, il existe alors $I^\star \subseteq [n]$ tel que

$$r(S^\star) + \Big|\Big(\bigcup_{i\in I^\star} X_i\Big) \setminus S^\star\Big| + n - |I^\star| \leqslant n-1\,.$$

Une dernière manipulation conduit à l'expression demandée.

Question 6. *En déduire que s'il n'existe pas de transversal indépendant, alors il existe $I^\star \subseteq [n]$ tel que $r\big(\bigcup_{i\in I^\star} X_i\big) < |I^\star|$. Conclure.*

On a

$$r\Big(\bigcup_{i\in I^\star} X_i\Big) \leqslant r(S^\star) + r\bigg(\Big(\bigcup_{i\in I^\star} X_i\Big) \setminus S^\star\bigg) \leqslant r(S^\star) + \Big|\Big(\bigcup_{i\in I^\star} X_i\Big) \setminus S^\star\Big| < |I^\star|\,.$$

La première inégalité provient de la sous-modularité et de la monotonie de r et du fait que $r(\varnothing) = 0$, la deuxième inégalité provient de l'inégalité $r(X) \leqslant |X|$ toujours valable pour la fonction rang, et la troisième inégalité vient de la question 5. C'est la contraposée de l'implication qu'on souhaite démontrer. Avec la question 2, le théorème de Rado est donc démontré.

2.2 Application : Théorème de Landau

Un *tournoi* est un graphe orienté simple sans boucle tel que pour tout paire i, j de sommets distincts, exactement l'un des deux arcs possibles (i, j) et (j, i) existe. En d'autres termes, un tournoi est obtenu en orientant chaque arête d'un graphe complet dans un sens ou dans l'autre, mais pas dans les deux. Un exemple de tournoi à six sommets est donné à la figure 1. Ce type de graphe est utilisé dans l'étude mathématique des compétitions organisées en matchs opposant toutes les paires possibles de joueurs : chaque sommet est un joueur et chaque arête orientée représente le résultat d'un match entre deux joueurs.

Considérons un tournoi $T = ([n], A)$ dont les sommets sont les entiers de 1 à n. Le *score* s_i^T d'un sommet i de T est défini par $s_i^T \coloneqq \deg_T^+(i)$. Par extension, le *score* du tournoi T est le vecteur $\boldsymbol{s}^T \coloneqq (s_1^T, \ldots, s_n^T) \in \mathbb{Z}_+^n$.

Question 7. *Expliquer pourquoi $s([n]) = |A|$ est une condition nécessaire pour qu'un vecteur $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^n$ soit le score d'un tournoi. Donner un exemple montrant que cette relation n'est pas une condition suffisante.*

Si $\boldsymbol{s}$ est un score, $s([n])$ est la somme des degrés sortants des sommets, ce qui égal au nombre d'arcs. Prendre $\boldsymbol{s} = (3, 3, 0, 0)$ montre que ce n'est pas suffisant : un sommet de degré sortant $n-1$ est une source, et il ne peut y avoir qu'une.

Considérons la condition suivante :

$$s(I) \geqslant \binom{|I|}{2} \quad \forall I \subseteq [n] \qquad \text{et} \qquad s([n]) = \binom{n}{2}\,. \tag{$\perp$}$$

Le théorème suivant, dû à Landau (1953), caractérise les scores de tournoi.

Théorème (Théorème de Landau)**.** *Un vecteur $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^n$ est le score d'un tournoi $T = ([n], A)$ si et seulement si la condition $(\perp)$ est satisfaite.*

Le but de cette partie de l'exercice est d'utiliser le théorème de Rado pour démontrer le théorème de Landau.

Question 8. *Démontrer que $(\perp)$ est une condition nécessaire à ce qu'un vecteur d'entiers soit le score d'un tournoi.*

Le nombre d'arcs du sous-graphe induit par I contient $\binom{|I|}{2}$ arcs. La quantité $s(I)$ est la somme des degrés sortants des sommets dans I et cela compte au moins tous les arcs du sous-graphe induit par I. La relation $s([n]) = \binom{n}{2}$ est celle donnée à la question 7.

Nous nous concentrons désormais sur la réciproque. Posons $V \coloneqq \{(i,j) \colon i,j \in [n],\, i \neq j\}$ et

$$\mathcal{S} = \left\{ S \subseteq V \colon |S \cap \{(i,j),(j,i)\}| \leqslant 1 \ \ \forall i \neq j \right\}.$$

Question 9. *Expliquer pourquoi $(V, \mathcal{S})$ est un matroïde et donner l'expression de sa fonction rang r.*

C'est un matroïde de partition. Le rang de S, c'est le nombre de couples (i,j) avec $i < j$ tels que $S \cap H_{i,j} \neq \varnothing$, où $H_{i,j} = \{(i,j),(j,i)\}$.

Pour un vecteur $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^n$, on considère la famille $\mathcal{F}^{\boldsymbol{s}}$ des parties $X_{i,k}$ de V définie par $X_{i,k} \coloneqq \left\{(i,j) \colon j \in [n] \setminus \{i\}\right\}$ pour $i \in [n]$ et $k \in [s_i]$. Noter qu'à i fixé, les $X_{i,k}$ sont tous identiques, et donc que $\mathcal{F}^{\boldsymbol{s}}$ contient de nombreuses répétitions.

Question 10. *Démontrer que si $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^n$ vérifie $(\perp)$, alors $r\big(\bigcup_{(i,k)\in Z} X_{i,k}\big) \geqslant |Z|$ pour tout $Z \subseteq \{(i,k) \colon i \in [n], k \in [s_i]\}$.*

Soit $Z \subseteq \{(i,k) \colon i \in [n], k \in [s_i]\}$. Posons $I = \{i \in [n] \colon \exists k \text{ t.q. } (i,k) \in Z\}$. Écrivons $I = \{i_1 < \cdots < i_\ell\}$. On a $r\big(\bigcup_{(i,k)\in Z} X_{i,k}\big) = \ell(n-1) - \frac{1}{2}\ell(\ell-1)$: en effet, le nombre de couples différents dans $\bigcup_{i \in I} X_{i,k}$, c'est $\ell(n-1)$, et les couples de la formes (i_a, i_b) sont ceux qui apparaissent "dans les deux sens" et sont donc comptés deux fois.

Par ailleurs, on a $s(I) = s([n]) - s([n] \setminus I) \leqslant \frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{2}(n-\ell)(n-\ell-1)$ en appliquant $(\perp)$ à $[n] \setminus I$. Un calcul rapide montrant $\frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{2}(n-\ell)(n-\ell-1) = \ell(n-1) - \frac{1}{2}\ell(\ell-1)$, on a $r\big(\bigcup_{(i,k)\in Z} X_{i,k}\big) \geqslant s(I)$. On conclut en notant que $|Z| \leqslant s(I)$.

Question 11. *En déduire que $(\perp)$ est une condition suffisante.*

D'après le théorème de Rado, il existe un indépendant de $(V, \mathcal{S})$ qui contient exactement s_i couples (i,j) pour tout i. Cet indépendant est donc de cardinal $\frac{1}{2}n(n-1)$. Il décide pour chaque paire ij si c'est l'arc (i,j) ou l'arc (j,i) qui est sélectionné. Le degré du sommet i sera bien s_i.

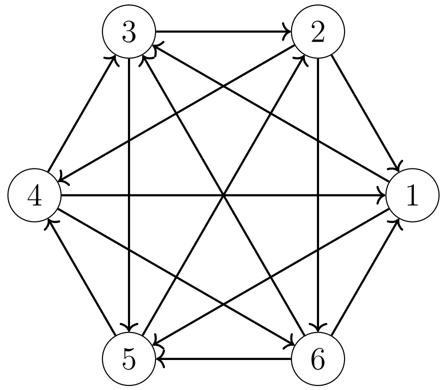

FIGURE 1 – Un tournoi à six sommets

3 Troncation de Dilworth

Considérons une fonction sous-modulaire $f\colon 2^V \to \mathbb{R}$. Sa troncation de Dilworth (1944) $\hat{f}\colon 2^V \to \mathbb{R}$ se définit, pour tout $S \subseteq V$, par

$$\hat{f}(S) \coloneqq \min\left\{\sum_{P\in\mathcal{P}} f(P)\colon \mathcal{P} \text{ est une partition de } S\right\}.$$

On rappelle qu'une partition ne contient jamais de partie vide, mais qu'une partition peut être vide. On a donc $\hat{f}(\varnothing) = 0$.

La beauté de la chose : la troncation de Dilworth est sous-modulaire. L'objectif de la sous-section suivante est précisément de démontrer ce fait.

3.1 Sous-modularité

Soient $S, T \subseteq V$. Posons $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ respectivement les partitions de S et T telles que

$$\hat{f}(S) = \sum_{P\in\mathcal{S}} f(P) \quad \text{et} \quad \hat{f}(T) = \sum_{Q\in\mathcal{T}} f(Q)\,.$$

Soit $\mathcal{F}$ la famille formée par les parties dans $\mathcal{S}$ et dans $\mathcal{T}$, en prenant une partie deux fois si elle est présente dans les deux partitions. Considérons l'algorithme suivant : tant qu'il existe $X, Y \in \mathcal{F}$ tels que $X \cap Y$, $X \setminus Y$ et $Y \setminus X$ soient tous trois non-vides, remplacer X et Y dans $\mathcal{F}$ par $X \cap Y$ et $X \cup Y$.

Question 12. *En considérant la quantité $\sum_{Z\in\mathcal{F}} |Z||V \setminus Z|$, montrer que l'algorithme se termine nécessairement.*

Posons $\alpha = |X \setminus Y|$, $\beta = |X \cap Y|$, $\gamma = |Y \setminus X|$, $\delta = V \setminus (X \cup Y)$. On a

$$|X||V \setminus X| + |Y||V \setminus Y| = (\alpha+\beta)(\gamma+\delta) + (\beta+\gamma)(\alpha+\delta).$$

$$|X\cap Y||V\setminus(X\cap Y)|+|X\cup Y||V\setminus(X\cup Y)=\beta(\alpha+\gamma+\delta)+\delta(\alpha+\beta+\gamma)\,.$$

Or $\alpha\gamma>0$. Donc, à chaque itération, cette quantité diminue strictement. Comme on est sur des entiers positifs, l'algorithme doit se terminer.

Noter que lorsque l'algorithme se termine, la famille $\mathcal{F}$ est nécessairement laminaire. Soit $\mathcal{R}$ les parties dans $\mathcal{F}$ maximales pour l'inclusion (si deux parties sont identiques et maximales, on n'en prend qu'une).

Question 13. *Montrer que $\mathcal{R}$ forme une partition de $S\cup T$ et que $\mathcal{F}\setminus\mathcal{R}$ forme une partition de $S\cap T$.*

Au cours de l'algorithme, les invariants suivants sont maintenus : tout élément dans $S\cap T$ est contenu dans exactement deux parties ; tout élément dans $S\triangle T$ est contenu dans exactement une partie. Les parties dans $\mathbb{R}$ couvrent donc $S\cup T$, et, $\mathcal{F}$ étant laminaire, $\mathcal{R}$ est une partition de $S\cup T$. Les parties dans $\mathcal{F}\setminus\mathcal{R}$ couvrent donc $S\cap T$ et, $\mathcal{F}$ étant laminaire, $\mathcal{F}\setminus\mathcal{R}$ est une partition de $S\cap T$.

Question 14. *En déduire que $\hat{f}$ est sous-modulaire.*

On a

$$\hat{f}(S)+\hat{f}(T)=\sum_{P\in\mathcal{S}}f(P)+\sum_{Q\in\mathcal{T}}f(Q)\geqslant\sum_{R\in\mathcal{R}}f(R)+\sum_{R'\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{R}}f(R')\geqslant\hat{f}(S\cup T)+\hat{f}(S\cap T)\,.$$

(La première inégalité résulte du fait qu'au cours de l'algorithme, la quantité $\sum_{Z\in\mathcal{F}}f(Z)$ ne peut augmenter, f étant sous-modulaire.)

3.2 Quelques propriétés

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions sous-modulaires $g\colon 2^V\to\mathbb{R}$ telles que $g(\varnothing)=0$ et $g(S)\leqslant f(S)$ pour tout $S\neq\varnothing$.

Question 15. *Montrer que $\hat{f}\in\mathcal{G}$ et $\hat{f}\geqslant g$ pour tout $g\in\mathcal{G}$.*

Pour $S\neq\varnothing$, le singleton $\{S\}$ est une partition de S. On a donc $\hat{f}(S)\leqslant f(S)$. Par ailleurs, pour $\mathcal{P}$ une partition telle que $\hat{f}(S)=\sum_{P\in\mathcal{P}}f(P)$, on a $\hat{f}(S)\geqslant\sum_{P\in\mathcal{P}}g(P)\geqslant g(S)$, où la seconde inégalité résulte de la sous-modularité de g combinée à $g(\varnothing)=0$.

En d'autres termes, $\hat{f}$ est l'élément maximal de $\mathcal{G}$.

Posons

$$EP'_f\coloneqq\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^V : x(S)\leqslant f(S)\text{ pour tout }S\in 2^V\setminus\{\varnothing\}\right\}.$$

C'est une sorte de polymatroïde étendu pour lequel on aurait oublié la contrainte associée à l'ensemble vide. Noter que cela permet d'avoir $EP'_f\neq\varnothing$ même si $f(\varnothing)<0$.

Question 16. *Montrer que $EP'_f=EP_{\hat{f}}$.*

Soit $\boldsymbol{x} \in EP_{\hat{f}}$. On a $x(S) \leqslant \hat{f}(S) \leqslant f(S)$ pour tout $S \neq \varnothing$. Donc $\boldsymbol{x} \in EP'_f$. Réciproquement, soit $\boldsymbol{x} \in EP'_f$. La fonction $S \mapsto x(S)$ est sous-modulaire (et même modulaire), vérifie $x(\varnothing) = 0$ et $x(S) \leqslant f(S)$ pour tout $S \neq \varnothing$. Donc, d'après la question 15, on a $x(S) \leqslant \hat{f}(S)$ pour tout S

Pour la fin de cet exercice, qui s'intéresse à des questions algorithmiques, on suppose que f est donnée sous la forme d'un oracle.

L'objet des trois prochaines questions est de démonter que $\hat{f}(V)$ peut être calculé en temps polynomial.

Numérotons arbitrairement $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les éléments de V. Posons $\boldsymbol{x} \coloneqq \mathbf{0}$. Pour $i = 1, \ldots, n$, répéter :

- $U_i \coloneqq \{v_1, \ldots, v_i\}$.
- $\mu \coloneqq \min\{f(S) - x(S) \colon S \ni v_i,\ S \subseteq U_i\}$.
- $x_{v_i} \coloneqq \mu$.

Question 17. *Expliquer pourquoi cet algorithme peut être exécuté en temps polynomial.*

Le nombre d'itérations est polynomial, et toutes les étapes peuvent être exécutées en temps polynomial. La seule qui mérite une petite discussion est celle du milieu. Notons que $S' \in U_{i-1} \mapsto f(S' + v_i) - x(S' + v_i)$ est sous-modulaire, et donc cette étape consiste à minimiser une fonction sous-modulaire, ce qui est polynomial d'après le cours.

Question 18. *Démontrer que l'algorithme se termine avec $\boldsymbol{x} \in EP'_f$ et pour tout $v \in V$ une partie $S_v \subseteq V$ telle que $v \in S_v$ et $x(S_v) = f(S_v)$.*

Par récurrence sur i, on a $x(S) \leqslant f(S)$ pour $S \subseteq U_i$, avec $S \neq \varnothing$, et l'inégalité est une égalité pour au moins un $S_{v_i} \subseteq U_i$ avec $v_i \in S_{v_i}$.

Question 19. *Démontrer que $\hat{f}(V) = x(V)$. (Indication : on pourra d'abord montrer que si $S, T \subseteq V$ sont telles que $f(S) = x(S)$, $f(T) = x(T)$ et $S \cap T \neq \varnothing$, alors $f(S \cup T) = x(S \cup T)$.)*

Démontrons d'abord l'indication : on a

$$x(S \cup T) + x(S \cap T) = f(S) + f(T) \geqslant f(S \cup T) + f(S \cap T) \geqslant x(S \cup T) + x(S \cap T)\,,$$

donc toutes les inégalités sont des égalités, et $f(S \cup T) = x(S \cup T)$.

On considère les S_v. Tant qu'il y en a deux qui ont une intersection non vide, on les remplace par leur union. Avec l'indication, on termine par une partition $\mathcal{S}$ telle que $f(S) = x(S)$ pour tout $S \in \mathcal{S}$. Comme $S \mapsto x(S)$ est sous-modulaire (et même modulaire), on a d'après la question 15, $x(V) \leqslant \hat{f}(V) \leqslant \sum_{S \in \mathcal{S}} f(S) = x(V)$ et donc $\hat{f}(V) = x(V)$.

On sait donc calculer en temps polynomial la valeur de $\hat{f}(V)$. De même, on peut montrer que l'on sait calculer en temps polynomial la valeur de $\hat{f}(S)$ pour tout $S \subseteq V$.

Question 20. *En déduire que l'on peut minimiser en temps polynomial tout critère linéaire sur EP'_f.*

D'après la question 16, $EP'_f = EP_{\hat{f}}$. En accédant à $\hat{f}(S)$ par un oracle, on a un algorithme polynomial pour optimiser un critère linéaire sur $EP_{\hat{f}}$ (c'est du cours). Comme on sait calculer $\hat{f}(S)$ en temps polynomial pour tout S, on a donc un algorithme polynomial pour optimiser sur EP'_f.