Contrôle d'optimisation combinatoire avancée
MPRO

9 février 2026

Tout objet électronique (smartphone, tablette, ordinateur, calculatrice, etc.) interdit.

Tout document papier autorisé.

1 Matroïdes Θ_n

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Considérons $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ deux ensembles disjoints de cardinal n. Posons

$$\mathcal{I} \coloneqq \left\{ S \subseteq X \cup Y \colon |S| \leqslant n,\, |S \cap X| \leqslant 2 \text{ et } S \neq Y - y_i + x_i \,\forall i \right\}.$$

Question 1. *Montrer que $(X \cup Y, \mathcal{I})$ est un matroïde. (Attention : prendre le temps de soigner rédaction.)*

Ce matroïde est appelé *matroïde* Θ_n.

2 Théorème de Rado

2.1 Énoncé et preuve

Considérons un matroïde $M = (V, \mathcal{I})$ de fonction rang r et une famille $\mathcal{F} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ de parties de V. Un *transversal* de $\mathcal{F}$ est une partie T de V telle qu'il existe une bijection $\sigma \colon [n] \to T$ avec $\sigma(i) \in X_i$ pour tout $i \in [n]$.

L'objectif de cet exercice est démontrer un théorème de Rado (1942).

Théorème (Théorème de Rado)**.** *La famille $\mathcal{F}$ admet un transversal qui est indépendant dans M si et seulement si*

$$r\Big(\bigcup_{i \in I} X_i\Big) \geqslant |I| \qquad \forall I \subseteq [n]\,. \tag{1}$$

Pour simplifier la discussion, un transversal de $\mathcal{F}$ qui est indépendant dans M sera appelé *transversal indépendant*.

Question 2. *Montrer que si $\mathcal{F}$ admet un transversal indépendant, alors l'inégalité* (1) *est satisfaite pour tout $I \subseteq [n]$.*

Nous allons maintenant nous intéresser à la réciproque.

Question 3. *Décrire un matroïde transversal sur V dont les bases, lorsqu'elles sont de cardinal n, sont exactement les transversaux des X_i.*

Question 4. *Démontrer que la fonction rang r_N du matroïde transversal N introduit à la question 3 vérifie*

$$r_N(S) = \min_{I \subseteq [n]} \Big(\big| S \cap \big(\bigcup_{i \in I} X_i \big) \big| + n - |I| \Big) \qquad \forall S \subseteq V\,.$$

Question 5. *Montrer que s'il n'existe pas de transversal indépendant, alors il existe $S^\star \subseteq V$ et $I^\star \subseteq [n]$ tels que*

$$r(S^\star) + \big| \big(\bigcup_{i \in I^\star} X_i \big) \setminus S^\star \big| < |I^\star|\,.$$

Question 6. *En déduire que s'il n'existe pas de transversal indépendant, alors il existe $I^\star \subseteq [n]$ tel que $r\big(\bigcup_{i \in I^\star} X_i\big) < |I^\star|$. Conclure.*

2.2 Application : Théorème de Landau

Un *tournoi* est un graphe orienté simple sans boucle tel que pour tout paire i, j de sommets distincts, exactement l'un des deux arcs possibles (i, j) et (j, i) existe. En d'autres termes, un tournoi est obtenu en orientant chaque arête d'un graphe complet dans un sens ou dans l'autre, mais pas dans les deux. Un exemple de tournoi à six sommets est donné à la figure 1. Ce type de graphe est utilisé dans l'étude mathématique des compétitions organisées en matchs opposant toutes les paires possibles de joueurs : chaque sommet est un joueur et chaque arête orientée représente le résultat d'un match entre deux joueurs.

Considérons un tournoi $T = ([n], A)$ dont les sommets sont les entiers de 1 à n. Le *score* s_i^T d'un sommet i de T est défini par $s_i^T \coloneqq \deg_T^+(i)$. Par extension, le *score* du tournoi T est le vecteur $\boldsymbol{s}^T \coloneqq (s_1^T, \ldots, s_n^T) \in \mathbb{Z}_+^n$.

Question 7. *Expliquer pourquoi $s([n]) = |A|$ est une condition nécessaire pour qu'un vecteur $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^n$ soit le score d'un tournoi. Donner un exemple montrant que cette relation n'est pas une condition suffisante.*

Considérons la condition suivante :

$$s(I) \geqslant \binom{|I|}{2} \quad \forall I \subseteq [n] \qquad \text{et} \qquad s([n]) = \binom{n}{2}\,. \tag{$\perp$}$$

Le théorème suivant, dû à Landau (1953), caractérise les scores de tournoi.

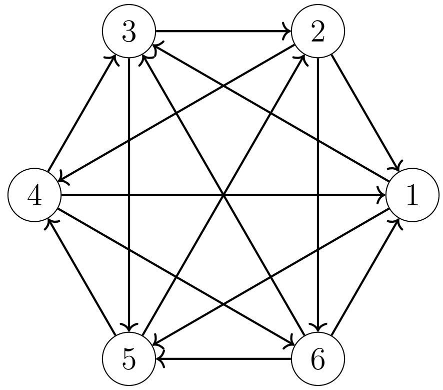

FIGURE 1 – Un tournoi à six sommets

Théorème (Théorème de Landau)**.** *Un vecteur* $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^n$ *est le score d'un tournoi* $T = ([n], A)$ *si et seulement si la condition* $(\perp)$ *est satisfaite.*

Le but de cette partie de l'exercice est d'utiliser le théorème de Rado pour démontrer le théorème de Landau.

Question 8. *Démontrer que* $(\perp)$ *est une condition nécessaire à ce qu'un vecteur d'entiers soit le score d'un tournoi.*

Nous nous concentrons désormais sur la réciproque. Posons $V \coloneqq \{(i,j) \colon i,j \in [n],\ i \neq j\}$ et

$$\mathcal{S} = \big\{ S \subseteq V \colon |S \cap \{(i,j),(j,i)\}| \leqslant 1 \ \ \forall i \neq j \big\} .$$

Question 9. *Expliquer pourquoi* $(V, \mathcal{S})$ *est un matroïde et donner l'expression de sa fonction rang* r*.*

Pour un vecteur $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^n$, on considère la famille $\mathcal{F}^{\boldsymbol{s}}$ des parties $X_{i,k}$ de V définie par $X_{i,k} \coloneqq \big\{(i,j) \colon j \in [n] \setminus \{i\}\big\}$ pour $i \in [n]$ et $k \in [s_i]$. Noter qu'à i fixé, les $X_{i,k}$ sont tous identiques, et donc que $\mathcal{F}^{\boldsymbol{s}}$ contient de nombreuses répétitions.

Question 10. *Démontrer que si* $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^n$ *vérifie* $(\perp)$*, alors* $r\big(\bigcup_{(i,k) \in Z} X_{i,k}\big) \geqslant |Z|$ *pour tout* $Z \subseteq \{(i,k) \colon i \in [n], k \in [s_i]\}$.

Question 11. *En déduire que* $(\perp)$ *est une condition suffisante.*

3 Troncation de Dilworth

Considérons une fonction sous-modulaire $f \colon 2^V \to \mathbb{R}$. Sa troncation de Dilworth (1944) $\hat{f} \colon 2^V \to \mathbb{R}$ se définit, pour tout $S \subseteq V$, par

$$\hat{f}(S) \coloneqq \min\Big\{ \sum_{P \in \mathcal{P}} f(P) \colon \mathcal{P} \text{ est une partition de } S \Big\} .$$

On rappelle qu'une partition ne contient jamais de partie vide, mais qu'une partition peut être vide. On a donc $\hat{f}(\varnothing) = 0$.

La beauté de la chose : la troncation de Dilworth est sous-modulaire. L'objectif de la sous-section suivante est précisément de démontrer ce fait.

3.1 Sous-modularité

Soient $S, T \subseteq V$. Posons $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ respectivement les partitions de S et T telles que

$$\hat{f}(S) = \sum_{P \in \mathcal{S}} f(P) \quad \text{et} \quad \hat{f}(T) = \sum_{Q \in \mathcal{T}} f(Q)\,.$$

Soit $\mathcal{F}$ la famille formée par les parties dans $\mathcal{S}$ et dans $\mathcal{T}$, en prenant une partie deux fois si elle est présente dans les deux partitions. Considérons l'algorithme suivant : tant qu'il existe $X, Y \in \mathcal{F}$ tels que $X \cap Y$, $X \setminus Y$ et $Y \setminus X$ soient tous trois non-vides, remplacer X et Y dans $\mathcal{F}$ par $X \cap Y$ et $X \cup Y$.

Question 12. *En considérant la quantité $\sum_{Z \in \mathcal{F}} |Z||V \setminus Z|$, montrer que l'algorithme se termine nécessairement.*

Noter que lorsque l'algorithme se termine, la famille $\mathcal{F}$ est nécessairement laminaire. Soit $\mathcal{R}$ les parties dans $\mathcal{F}$ maximales pour l'inclusion (si deux parties sont identiques et maximales, on n'en prend qu'une).

Question 13. *Montrer que $\mathcal{R}$ forme une partition de $S \cup T$ et que $\mathcal{F} \setminus \mathcal{R}$ forme une partition de $S \cap T$.*

Question 14. *En déduire que $\hat{f}$ est sous-modulaire.*

3.2 Quelques propriétés

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions sous-modulaires $g \colon 2^V \to \mathbb{R}$ telles que $g(\varnothing) = 0$ et $g(S) \leqslant f(S)$ pour tout $S \neq \varnothing$.

Question 15. *Montrer que $\hat{f} \in \mathcal{G}$ et $\hat{f} \geqslant g$ pour tout $g \in \mathcal{G}$.*

En d'autres termes, $\hat{f}$ est l'élément maximal de $\mathcal{G}$.

Posons

$$EP'_f \coloneqq \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^V : x(S) \leqslant f(S) \text{ pour tout } S \in 2^V \setminus \{\varnothing\} \right\}.$$

C'est une sorte de polymatroïde étendu pour lequel on aurait oublié la contrainte associée à l'ensemble vide. Noter que cela permet d'avoir $EP'_f \neq \varnothing$ même si $f(\varnothing) < 0$.

Question 16. *Montrer que $EP'_f = EP_{\hat{f}}$.*

Pour la fin de cet exercice, qui s'intéresse à des questions algorithmiques, on suppose que f est donnée sous la forme d'un oracle.

L'objet des trois prochaines questions est de démonter que $\hat{f}(V)$ peut être calculé en temps polynomial.

Numérotons arbitrairement $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les éléments de V. Posons $\boldsymbol{x} \coloneqq \mathbf{0}$. Pour $i = 1, \ldots, n$, répéter :

- $U_i \coloneqq \{v_1, \ldots, v_i\}$.
- $\mu \coloneqq \min\{f(S) - x(S) \colon S \ni v_i,\, S \subseteq U_i\}$.
- $x_{v_i} \coloneqq \mu$.

Question 17. *Expliquer pourquoi cet algorithme peut être exécuté en temps polynomial.*

Question 18. *Démontrer que l'algorithme se termine avec $\boldsymbol{x} \in EP'_f$ et pour tout $v \in V$ une partie $S_v \subseteq V$ telle que $v \in S_v$ et $x(S_v) = f(S_v)$.*

Question 19. *Démontrer que $\hat{f}(V) = x(V)$. (Indication : on pourra d'abord montrer que si $S, T \subseteq V$ sont telles que $f(S) = x(S)$, $f(T) = x(T)$ et $S \cap T \neq \varnothing$, alors $f(S \cup T) = x(S \cup T)$.)*

On sait donc calculer en temps polynomial la valeur de $\hat{f}(V)$. De même, on peut montrer que l'on sait calculer en temps polynomial la valeur de $\hat{f}(S)$ pour tout $S \subseteq V$.

Question 20. *En déduire que l'on peut minimiser en temps polynomial tout critère linéaire sur EP'_f.*