CONTRÔLE "GRAPHES AVANCÉS"
PARTIE "MATROÏDES"
2019-2020

Tout document papier autorisé.

Cette partie est formée de trois exercices indépendants.

Exercice 1 : Matroïde laminaire

Une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles est *laminaire* si, pour toute paire $A, B \in \mathcal{F}$, l'une au moins des propriétés suivantes est satisfaite :

- $A \subseteq B$,
- $B \subseteq A$,
- $A \cap B = \varnothing$.

Supposons donnés une famille laminaire $\mathcal{F}$, formée de parties d'un ensemble fini V, et un entier k_A pour tout $A \in \mathcal{F}$. Soit

$$\mathcal{I} = \big\{S \subseteq V\colon |S \cap A| \leqslant k_A \text{ pour tout } A \in \mathcal{F}\big\}.$$

L'objet de cet exercice est de démontrer que $(V, \mathcal{I})$ est un matroïde, appelé *matroïde laminaire.*

Soient $S, T \in \mathcal{I}$ tels que $|S| < |T|$.

Question 1. *Expliquer pourquoi, si $x \in T \setminus \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A$, alors on a $S \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.*

Question 2. *Prouver que, si $T \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A$, alors il existe une suite $A_1 \supset \cdots \supset A_k$ d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux distincts vérifiant les propriétés suivantes simultanément :*

- *A_1 est un élément maximal de $\mathcal{F}$ (pour l'inclusion),*
- *A_{i+1} est un élément maximal (pour l'inclusion) de $\{A \in \mathcal{F}\colon A \subseteq A_i, A \neq A_i\}$ pour tout $i \in [k-1]$,*
- *$|T \cap A_i| > |S \cap A_i|$ pour tout $i \in [k]$,*
- *si B est un élément maximal (pour l'inclusion) de $\{A \in \mathcal{F}\colon A \subseteq A_k, A \neq A_k\}$, alors on a $|S \cap B| \geqslant |T \cap B|$.*

Question 3. *Déduire de la question précédente que si $T \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A$, il existe $x \in T \setminus S$ tel que $S \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.*

Question 4. *Montrer que $(V, \mathcal{I})$ est bien un matroïde.*

Exercice 2 : Ordonnancements de tâches

On se donne n tâches à effectuer. Elles sont disponibles à l'instant $t = 0$ et prennent chacune exactement une unité de temps pour être réalisée. Une seule tâche peut être effectuée à la fois, et une fois commencée, une tâche ne peut être interrompue ("cas non-préemptif"). Chaque tâche j rapporte un profit $p_j \geqslant 0$ et est associée à un instant souhaité de réalisation d_j. Une tâche j réalisée avant d_j est *réalisée à temps*. Le profit p_j n'est engrangé que si la tâche

j est réalisée à temps. Un *ordonnancement* des tâches est un vecteur $\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ où t_j est l'instant de début de la tâche j. Un tel ordonnancement est *faisable* si à tout instant, au plus une tâche est en cours de réalisation. On note $O \subset \mathbb{R}_+^n$ l'ensemble des ordonnancements faisables.

Le problème consiste à trouver un ordonnancement faisable qui maximise le profit, c'est-à-dire à résoudre

$$\text{(P)} \qquad \max_{\boldsymbol{t} \in O} \sum_{j\colon t_j + 1 \leqslant d_j} p_j.$$

Question 5. *Considérons un ordonnancement faisable* $\boldsymbol{t} \in O$ *et notons* S *le sous-ensemble de tâches étant réalisées à temps :* $S = \{j \in [n]\colon t_j + 1 \leqslant d_j\}$*. Montrer qu'il existe un ordonnancement faisable qui fait démarrer les tâches de* S *aux instants* $0, 1, \dots, |S| - 1$*, c'est-à-dire qui démarre immédiatement et qui enchaîne les tâches dans* S *sans discontinuer.*

Considérons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{I} = \{S \subseteq [n]\colon \exists \boldsymbol{t} \in O, \forall j \in S, t_j + 1 \leqslant d_j\}.$$

Un élément S de cet ensemble est un sous-ensemble de tâches pour lesquelles il existe un ordonnancement faisable leur permettant d'être réalisées à temps. Nous allons démontrer que $([n], \mathcal{I})$ est un matroïde.

Considérons un ordre total $\preccurlyeq$ sur les tâches qui étend l'ordre partiel donné par les d_j : si $d_j < d_k$, alors $j \prec k$. (On admettra qu'un tel ordre total existe ; mais il est facile de vérifier son existence.)

Question 6. *Considérons un ordonnancement faisable et notons* S *le sous-ensemble de tâches étant réalisées à temps. Montrer qu'il existe un ordonnancement faisable* $\boldsymbol{t} \in O$ *où simultanément*

- $t_j < t_k$ *pour tout couple de tâches* $(j, k) \in S^2$ *telles que* $j \prec k$*,*
- *toute tâche dans* S *est encore réalisée à temps.*

Soient S et T deux éléments de $\mathcal{I}$, avec $|S| < |T|$. Soit j^* la tâche dans T la plus grande pour $\preccurlyeq$ telle que $j^* \notin S$.

Question 7. *Montrer qu'il existe un ordonnancement faisable tel que* $S \cup \{j^*\}$ *forme un sous-ensemble de tâches réalisées à temps.*

Question 8. *Prouver que* $([n], \mathcal{I})$ *est un matroïde.*

Question 9. *Conclure que* (P) *peut être résolu en* $O(n \log(n))$*.*

Exercice 3 : Union de matroïdes

Résultats préliminaires. Soit $M' = (V', \mathcal{I}')$ un matroïde. Considérons une fonction $f\colon V' \to V$. Posons $\mathcal{I} = \{f(I')\colon I' \in \mathcal{I}'\}$, où $f(I') = \{f(x)\colon x \in I'\}$.

Question 10. *Montrer que* $M = (V, \mathcal{I})$ *est un matroïde.*

Soit $S \subseteq V$. Pour $s \in S$, posons $U'_s = f^{-1}(s)$. Posons également $S' = f^{-1}(S)$. Ces ensembles U'_s définissent un matroïde de partition $N^S = (S', \mathcal{P}^S)$, où

$$\mathcal{P}^S = \{A \subseteq S'\colon |A \cap U'_s| \leqslant 1 \ \forall s \in S\}.$$

Dans les deux questions suivantes, on considère entre autres la restriction de M' à S', notée $M'|_{S'}$, dont l'ensemble d'éléments est S' et dont les indépendants sont ceux de M' inclus dans S'.

Question 11. *Montrer qu'il existe un indépendant I' commun à $M'|_{S'}$ et à N^S tel que $f(I') \subseteq S$ et $|f(I')| = r_M(S)$.*

Question 12. *Montrer que pour tout indépendant I' commun à $M'|_{S'}$ et à N^S, on a $|f(I')| \leqslant r_M(S)$.*

Question 13. *En déduire que $r_M(S) = \min_{T \subseteq S} \big(|S \setminus T| + r_{M'}(f^{-1}(T))\big)$.*

Union. Soient $M_1 = (V_1, \mathcal{I}_1)$, ..., $M_k = (V_k, \mathcal{I}_k)$ des matroïdes. L'*union* de ces matroïdes se définit comme

$$M_1 \vee \cdots \vee M_k = (V_1 \cup \cdots \cup V_k, \mathcal{I}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{I}_k),$$

où $\mathcal{I}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{I}_k = \{I_1 \cup \cdots \cup I_k \colon I_1 \in \mathcal{I}_1, \ldots, I_k \in \mathcal{I}_k\}$.

Question 14. *Montrer que si les V_i sont deux à deux disjoints, alors $M_1 \vee \cdots \vee M_k$ est un matroïde.*

En réalité, $M_1 \vee \cdots \vee M_k$ est toujours un matroïde, même si les V_i ne sont pas deux à deux disjoints. C'est l'objet de la question suivante.

Question 15. *Montrer que $M_1 \vee \cdots \vee M_k$ est toujours un matroïde. (Indication : on pourra s'appuyer sur les questions 10 et 14.)*

Question 16. *Montrer que la fonction de rang r de $M_1 \vee \cdots \vee M_k$ est donnée par*

$$r(S) = \min_{T \subseteq S} \big(|S \setminus T| + r_{M_1}(T \cap V_1) + \cdots + r_{M_k}(T \cap V_k)\big)$$

pour $S \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_k$. (Indication : on pourra s'appuyer sur la question 13.)

Application.

Question 17. *Soit $M = (V, \mathcal{I})$ un matroïde. Montrer que V peut être couvert par k indépendants de M si et seulement si $k \cdot r_M(T) \geqslant |T|$ pour tout $T \subseteq V$.*

C'était une conjecture de Rado, formulée dans les années 50, dans le cas particulier des matroïdes linéaires. Ce résultat donne aussi pour un entier k donné une condition nécessaire et suffisante à l'existence dans un graphe $G = (V, E)$ de k arbres couvrants $T_1 = (V, F_1)$, $T_2 = (V, F_2)$, ..., $T_k = (V, F_k)$ tels que $\bigcup_{i=1}^{k} F_i = E$.

Question 18. *Peut-on décider en temps polynomial de l'existence de tels k arbres couvrants ?*