CONTRÔLE "GRAPHES AVANCÉS"
PARTIE "MATROÏDES"
2021-2022

Tout objet électronique (smartphone, tablette, ordinateur, calculatrice, etc.) interdit.

Tout document papier autorisé.

1. Problème "cumulatif" pour les matroïdes

Soit V un ensemble fini dont chaque élément v est muni d'un poids $w(v)$. Par ailleurs, on se donne un entier $t \geqslant 1$ et des réels $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_t > 0$. On supposera que les éléments de V sont écrits sous la forme $v_1, \ldots, v_n$ avec $w(v_1) \leqslant w(v_2) \leqslant \cdots \leqslant w(v_n)$, où n est la cardinalité de V.

Soit $\mathcal{I}$ une collection de parties de V telle que si $I \in \mathcal{I}$ et $J \subseteq I$, alors $J \in \mathcal{I}$. Posons $M = (V, \mathcal{I})$.

On s'intéresse au problème d'optimisation consistant à trouver la fonction injective $\pi\colon [t] \to [n]$ telle que $\{v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(t)}\}$ appartienne à $\mathcal{I}$ et que la quantité $\sum_{k=1}^{t} a_k w(v_{\pi(k)})$ soit minimale.

1.1. Si M est un matroïde.

Dans cette section, on suppose que M est un matroïde.

Question 1. *Quel algorithme du cours peut-on utiliser pour résoudre ce problème lorsque $a_1 = a_2 = \cdots = a_t = 1$?*

Considérons maintenant l'algorithme suivant.

```
I ← ∅;
k ← 0;
for i = 1, ..., n do
    if (k < t) and (I + v_i ∈ 𝓘) then
        I ← I + v_i;
        k ← k + 1;
        π(k) ← i;
    end
end
if k = t then
    return π;
else
    return "Le problème n'est pas réalisable.";
end
```

Question 2. *Expliquer pourquoi l'algorithme résout correctement le problème dans le cas où M est de rang strictement plus petit que t.*

On s'intéresse maintenant au cas où M est un matroïde de rang supérieur ou égal à t.

Question 3. *Montrer que $r_M(\{v_1, v_2, \ldots, v_{\pi(k)-1}\}) = k-1$ pour tout $k \in [t]$.*

Question 4. *Soit J un indépendant quelconque de M de rang t. Notons $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_t}$ ses éléments, avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_t$. Soit π la fonction renvoyée par l'algorithme. Déduire de la question précédente que $w(v_{\pi(k)}) \leqslant w(v_{i_k})$ pour tout k.*

Question 5. *Considérons une suite $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_t$ de réels. Montrer que l'identité est solution optimale du problème consistant à maximiser $\sum_{k=1}^{t} a_k x_{\sigma(k)}$ pour σ pris dans l'ensemble des permutations de $[t]$.*

Question 6. *Montrer alors que l'algorithme résout également correctement le problème dans le cas où M est un matroïde de rang est au moins t.*

Par conséquent, quand M est un matroïde, l'algorithme résout correctement le problème.

1.2. **Réciproque.** La question suivante s'intéresse à la réciproque. On ne suppose donc plus que M soit *a priori* un matroïde. (Mais on suppose toujours que si $I \in \mathcal{I}$ et $J \subseteq I$, alors $J \in \mathcal{I}$.)

Question 7. *Montrer que si l'algorithme ci-dessus résout le problème correctement pour tout choix des poids $w(v)$ et de l'entier t, alors M est un matroïde.*

2. Matroïdes "paving"

Considérons un ensemble fini V, un entier $r \geqslant 1$ et une collection $\mathcal{S}$ de parties de V telle que $|S \cap T| \leqslant r-2$ pour tous $S, T \in \mathcal{S}$ avec $S \neq T$. Soit $\mathcal{I}$ la collection des parties I de V telles que $|I| \leqslant r$ et $|I \cap S| < r$ pour tout $S \in \mathcal{S}$. (En particulier, toute partie de V avec au plus $r-1$ éléments est dans $\mathcal{I}$.)

Question 8. *Soit $I \in \mathcal{I}$ tel que $|I| = r-1$. Posons $A = \{v \in V : I + v \notin \mathcal{I}\}$. Montrer que $I \cup A \in \mathcal{S}$.*

Question 9. *Montrer que $(V, \mathcal{I})$ est un matroïde.*

Question 10. *Quel est son rang ?*

Un tel matroïde est appelé "paving", et a des propriétés remarquables. Il est conjecturé qu'asymptotiquement tous les matroïdes sont paving.

3. Caractérisation des matroïdes par la fonction rang

Soit V un ensemble fini. On s'intéresse aux fonctions $\rho \colon 2^V \to \mathbb{Z}_+$ qui vérifient pour tous $S, T \in 2^V$ les propriétés suivantes :

- $\rho(T) \leqslant \rho(S) \leqslant |S|$ si $T \subseteq S$.
- $\rho(S \cup T) + \rho(S \cap T) \leqslant \rho(S) + \rho(T)$.

On a vu dans le cours que parmi ces fonctions on trouve toutes les fonctions rangs de matroïdes définis sur V. L'objectif de cet exercice est de prouver la réciproque, à savoir que toute fonction de ce type est la fonction rang d'un certain matroïde.

Soit donc $\rho \colon 2^V \to \mathbb{Z}_+$ une fonction vérifiant les propriétés ci-dessus. Définissons $\mathcal{I}$ comme étant la collection des parties I de V telles que $\rho(I) = |I|$. Les trois questions suivantes ont pour but de montrer que $(V, \mathcal{I})$ est un matroïde.

Question 11. *Soient* $I \in \mathcal{I}$ *et* $J \subseteq I$. *Montrer que* $J \in \mathcal{I}$.

Question 12. *Soient* $I \in \mathcal{I}$ *et* $S \subseteq V$ *tels que* $\rho(I + v) = |I|$ *pour tout* $v \in S$. *Montrer que* $\rho(T) = |I|$ *pour tout* T *tel que* $I \subseteq T \subseteq I \cup S$.

Question 13. *Soient* $I, J \in \mathcal{I}$ *tels que* $|I| < |J|$. *Monter qu'il existe* $v \in J \setminus I$ *tel que* $I + v \in \mathcal{I}$

Le couple $(V, \mathcal{I})$ est donc un matroïde.

Question 14. *Soit* $S \subseteq V$ *tel que* $\rho(S) = |I|$ *pour un certain* $I \in \mathcal{I}$ *avec* $I \subseteq S$. *Soit* $v \in V \setminus S$ *tel que* $\rho(S + v) > \rho(S)$. *Montrer que* $\rho(I + v) > \rho(I)$.

Question 15. *Conclure que* ρ *est la fonction rang du matroïde* $(V, \mathcal{I})$.