CONTRÔLE "OPTIMISATION COMBINATOIRE AVANCÉE"
12 FÉVRIER 2024

Durée : 3h.

Tout objet électronique (smartphone, tablette, ordinateur, calculatrice, etc.) interdit.

Tout document papier autorisé.

1. Exercice : Étendre un matroïde

Soient $M = (V, \mathcal{I})$ un matroïde, U un ensemble (fini) disjoint de V et k un entier positif. On définit $\mathcal{I}' \coloneqq \{U' \cup S \colon U' \subseteq U,\ S \in \mathcal{I},\ |U' \cup S| \leqslant k\}$.

Question 1. *Montrer que $(U \cup V, \mathcal{I}')$ est également un matroïde.*

2. Exercice : Matroïdes de Catalan

Un *chemin de Dyck* de longueur $2n$ est un chemin du plan depuis le point $(0,0)$ jusqu'au point $(2n, 0)$, formé par une suite de déplacements $U = (1,1)$ et $D = (1,-1)$, qui ne passe jamais sous l'axe des abscisses. Tout chemin de Dyck a une *U-trace*, qui est le sous-ensemble de $[2n]$ correspondant aux étapes U. Par exemple, $UUDUDUUDDD$ encode un chemin de Dyck de longueur 10 et sa U-trace est $\{1,2,4,6,7\}$. Notons $\mathcal{D}_n$ la collection de toutes les U-traces des chemins de Dyck de longueur $2n$.

Question 2. *Démontrer que $\mathcal{D}_n$ est précisément l'ensemble de toutes les parties de $[2n]$ de cardinal n dont les éléments peuvent être écrits $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ avec $a_i \leqslant 2i - 1$ pour tout $i \in [n]$.*

Question 3. *Démontrer qu'une partie B de cardinal n est dans $\mathcal{D}_n$ si et seulement si on peut écrire B sous la forme $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ avec $b_j \in [2j-1]$ pour tout $j \in [n]$.*

Question 4. *En déduire que $\mathcal{D}_n$ est la collection des bases d'un matroïde transversal sur $[2n]$.*

Un tel matroïde est appelé *matroïde de Catalan.*

3. Exercice : Cette fonction est-elle sous-modulaire ?

On se donne un ensemble fini V, des poids $w_i \in \mathbb{R}_+$ pour tout $i \in V$ et un réel positif B. On définit alors $f \colon 2^V \to \mathbb{R}$ par $f(S) \coloneqq \min\{w(S), B\}$.

Question 5. *La fonction f est-elle sous-modulaire ? Justifier la réponse.*

4. Problème : Sous-ensembles de densité minimale et bases de polymatroïde lexicographiquement optimales

Pour l'ensemble de ce problème, on se donne une fonction sous-modulaire $f \colon 2^V \to \mathbb{R}_+$, où V est un ensemble fini. (Bien noter que f est à valeurs positives.)

4.1. **Sous-ensembles de densité minimale.** On définit la *densité* d'une partie S non vide de V comme étant la quantité $f(S)/|S|$. Notons ρ^* la densité minimale d'une partie non vide de V.

Question 6. *Montrer que l'ensemble des parties non vides de V de densité ρ^* est stable par union.*

Question 7. *Expliquer alors pourquoi la collection des parties non vides de densité minimale a un unique élément maximal pour l'inclusion.*

Question 8. *Montrer que ρ^* est la valeur maximale de t telle que $f(S) - t|S| \geqslant 0$ pour tout $S \subseteq V$.*

Pour les deux questions suivantes, on suppose que f est à valeurs rationnelles et qu'elle est donnée par un oracle. On suppose de plus que les valeurs prises par f peuvent être écrites sous la forme d'une fraction avec un numérateur et un dénominateur bornés par un nombre entier M.

Question 9. *Expliquer pourquoi on peut décider en temps polynomial si un rationnel t donné est tel que $f(S) - t|S| \geqslant 0$ pour tout $S \subseteq V$.*

Question 10. *En déduire que l'on peut calculer ρ^* de manière exacte et une partie S^* réalisant cette densité en temps polynomial.*

Application. Étant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un sous-ensemble $U \subseteq V$, on souhaite trouver une partie non vide S de U tel que $|\delta(S)|/|S|$ soit le plus petit possible.

Question 11. *Utiliser ce qui précède pour expliquer que l'on sait trouver une telle partie en temps polynomial.*

Question 12. *Que peut-on dire de la collection des parties non vides S de U minimisant $|\delta(S)|/|S|$?*

4.2. **Bases de polymatroïde lexicographiquement optimales.** Étant donné un vecteur $x \in \mathbb{R}^V$, on note $L(x)$ la suite des valeurs des entrées de x, ordonnées de la plus petite à la plus grande. Par exemple, si $x = (6, 9, 0, 6, 3, 3)$, alors $L(x) = 0, 3, 3, 6, 6, 9$. Une suite de réels $u_1, \ldots, u_p$ est lexicographiquement plus grande qu'une suite de réels $v_1, \ldots, v_p$ (de même longueur) si $u_j > v_j$ pour le plus petit indice j tel que $u_j \neq v_j$.

Dans cette sous-section, on s'intéresse à la détermination d'un point x^* du polymatroïde P_f associé à f tel que $L(x^*)$ soit lexicographiquement maximal. On rappelle que P_f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}_+^V$ tel que $x(S) \leqslant f(S)$ pour tout $S \subseteq V$. Dans cette optique, on va définir récursivement des réels $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p$ et une partition $S_1, S_2, \ldots, S_p$ de V, pour un certain entier p.

On pose $\lambda_1 \coloneqq \rho^*$ (densité minimale d'une partie S). On appelle S_1 la partie de V maximale pour l'inclusion réalisant cette densité : $f(S_1) = \lambda_1 |S_1|$. Cette partie maximale est bien définie grâce à la question 7.

On définit alors $f_2 \colon 2^{V \setminus S_1} \to \mathbb{R}$ par $f_2(S) \coloneqq f(S \cup S_1) - f(S_1)$.

Question 13. *Montrer que f_2 est une fonction sous-modulaire à valeurs positives.*

On s'intéresse au problème de trouver une partie non vide S de $V \setminus S_1$ de densité $f_2(S)/|S|$ minimale.

Question 14. *Expliquer pourquoi la collection de telles parties non vides a également un unique élément maximal pour l'inclusion.*

On appelle S_2 cette partie de $V \setminus S_1$ maximale pour l'inclusion, et λ_2 la densité correspondante.

Question 15. *Démontrer que* $\lambda_2 > \lambda_1$.

On continue de manière semblable la définition des autres λ_j et S_j, jusqu'à ce que $\bigcup_j S_j = V$. Cela se fait en posant $f_{j+1} \colon S \in 2^{V \setminus (S_1 \cup \cdots \cup S_j)} \to f_j(S \cup S_j) - f_j(S_j) \in \mathbb{R}_+$, où S_j est la partie de $V \setminus (S_1 \cup \cdots \cup S_{j-1})$, maximale pour l'inclusion, réalisant le minimum de $f_j(S)/|S|$. On définit alors $x_i^* \coloneqq \lambda_j$ pour tout $j \in [p]$ et tout $i \in S_j$.

Question 16. *Montrer que* $x^*\big(\bigcup_{j=1}^k S_j\big) = f\big(\bigcup_{j=1}^k S_j\big)$ *pour tout* $k \in [p]$.

Question 17. *En déduire que x^* est bien un point de P_f tel que $L(x^*)$ soit lexicographiquement maximal, et que ce point est unique.*

On définit maintenant $L'(x)$ comme étant la suite des valeurs des entrées de x, ordonnées de la plus grande à la plus petite. Par exemple, si $x = (6, 9, 0, 6, 3, 3)$, alors $L'(x) = 9, 6, 6, 3, 3, 0$.

Question 18. *Démontrer que x^* est également l'unique point de P_f tel que $x^*(V) = f(V)$ et que $L'(x^*)$ soit lexicographiquement minimal.*

Application. On se donne un graphe biparti $G = (W \cup T, E)$, où les sommets W représentent des employés et les sommets T des tâches. Chaque tâche $t \in T$ est munie d'une demande $d_t \in \mathbb{R}_+$, qui est la durée totale de travail qui doit lui être consacrée. Les arêtes dans E représentent les compétences : $wt \in E$ signifie que l'employé w peut effectuer la tâche t ; l'absence d'une telle arête indique l'incapacité d'un employé à effectuer une tâche.

Plusieurs employés peuvent travailler en parallèle sur une tâche. On souhaite donc trouver des réels positifs $(y_e)_{e \in E}$ tels que $\sum_{w \in N(t)} y_{wt} = d_t$ pour tout $t \in T$. (On note $N(\cdot)$ la fonction voisinage de G.) Le temps de travail de l'employé w est alors donné par $x_w \coloneqq \sum_{t \in N(w)} y_{wt}$, et le *makespan*, durée totale du projet, est donné par $\max_{w \in W} x_w$ (c'est aussi la charge de l'employé travaillant le plus).

Plusieurs critères sont possibles :

- La minimisation du déséquilibre maximal, où le déséquilibre maximal est défini comme $\max_{w,w'}(x_w - x_{w'})$.
- La minimisation du makespan.
- La maximisation de la charge de l'employé travaillant le moins.

Question 19. *Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+^W$ est tel que $x(S) \leqslant d(N(S))$ pour tout $S \subseteq W$, alors il existe des réels positifs $(y_e)_{e \in E}$ tels que $x_w = \sum_{t \in N(w)} y_{wt}$ pour tout $w \in W$ et $\sum_{w \in N(t)} y_{wt} \leqslant d_t$ pour tout $t \in T$.*

Question 20. *Montrer que la fonction qui à $S \subseteq W$ associe $d(N(S))$ est sous-modulaire.*

Question 21. *Expliquer pourquoi il existe une répartition du temps de travail entre les employés optimisant simultanément les trois critères précisés ci-dessus.*

Question 22. *Démontrer qu'une telle répartition peut se trouver en temps polynomial.*